

Mécanique des structures

$$\Gamma_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

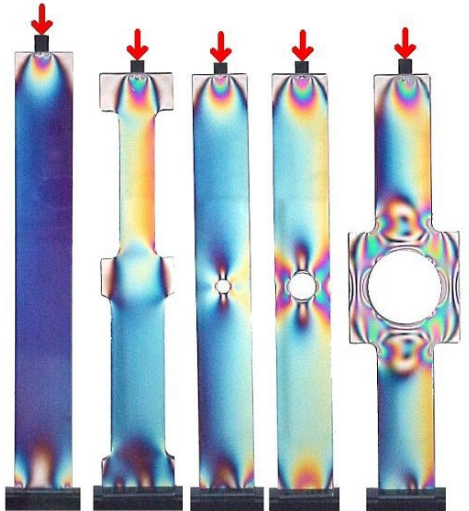
EPFL



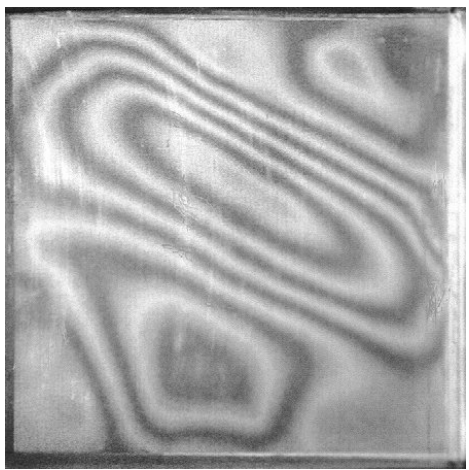
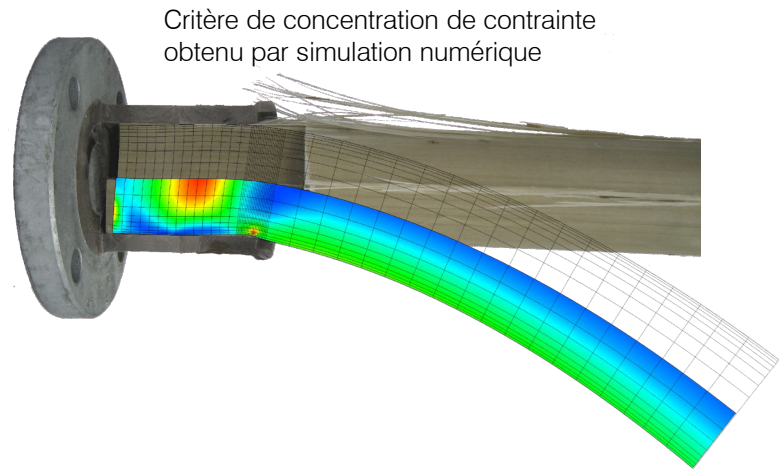
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Exemple de visualisation de l'état de contrainte



Visualisation des contraintes internes par des sources de lumière polarisée



Interférence de Moiré d'une plaque sous contrainte

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Analyse de l'état de contrainte

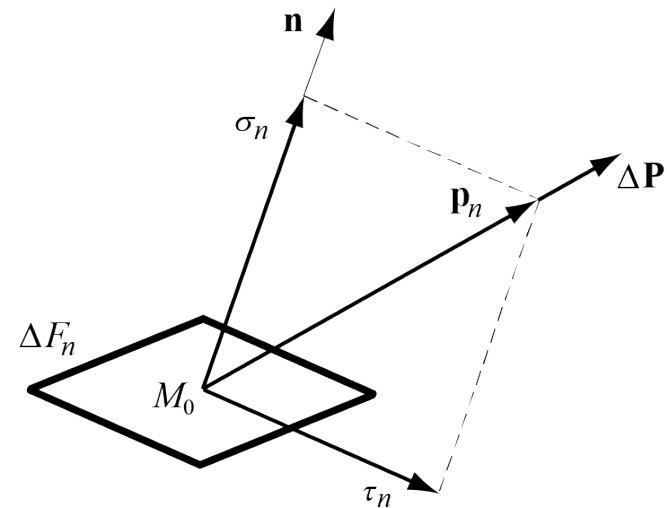
Les contraintes autour d'un point M_0 d'un milieu continu sont, par définition, les forces spécifiques agissant sur les éléments de surface passant par ce point

Soit ΔF_n un élément de surface passant par M_0 , de vecteur normal unitaire \mathbf{n} , sur lequel agit une force élémentaire $\Delta \mathbf{P}$.

La contrainte \mathbf{p}_n sur cet élément de surface, repéré par le vecteur \mathbf{n} , a donc pour valeur

- $$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta F_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta F_n} = \frac{d\mathbf{P}}{dF_n}$$

La contrainte normale sur l'élément de surface ΔF_n est la projection σ_n de la contrainte \mathbf{p}_n sur la normale \mathbf{n} , tandis que la contrainte tangentielle sur cet élément est la composante τ_n de \mathbf{p}_n dans le plan de ΔF_n



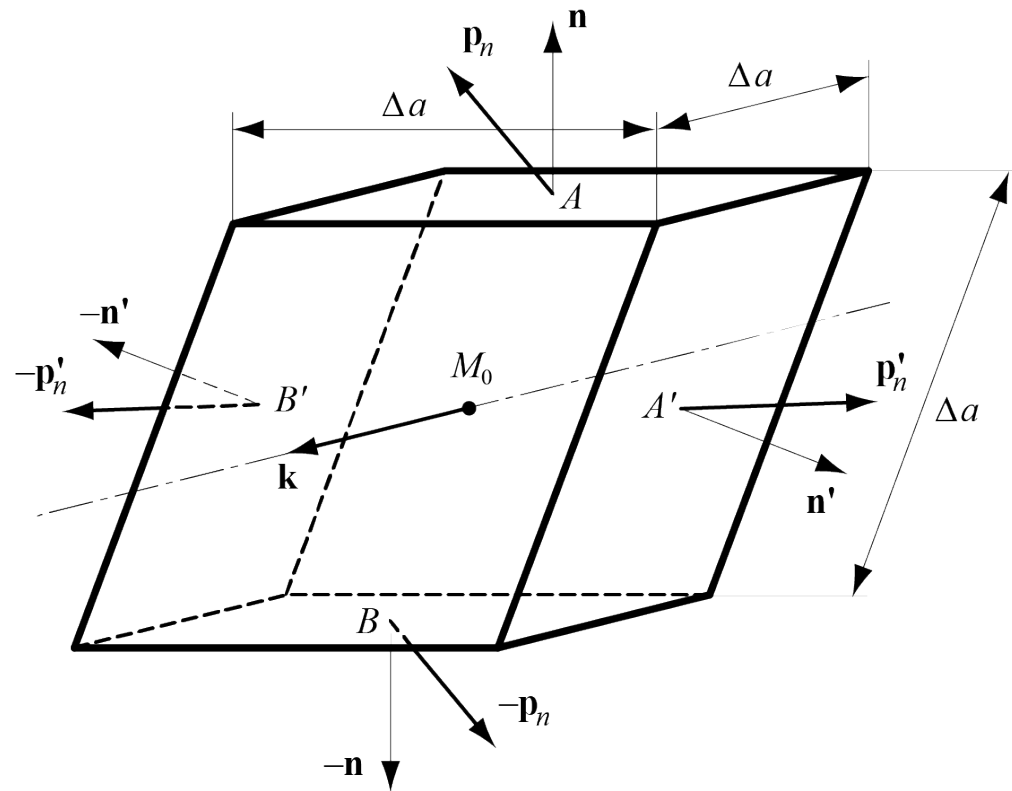
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Analyse de l'état de contrainte

Théorème de Cauchy : *La projection d'une contrainte \mathbf{p}_n , relative à une face de normale \mathbf{n} , sur la normale \mathbf{n}' d'une autre face passant par le même point M_0 d'un milieu continu est égale à la projection de la contrainte \mathbf{p}'_n , relative à la face de normale \mathbf{n}' , sur la normale \mathbf{n}*

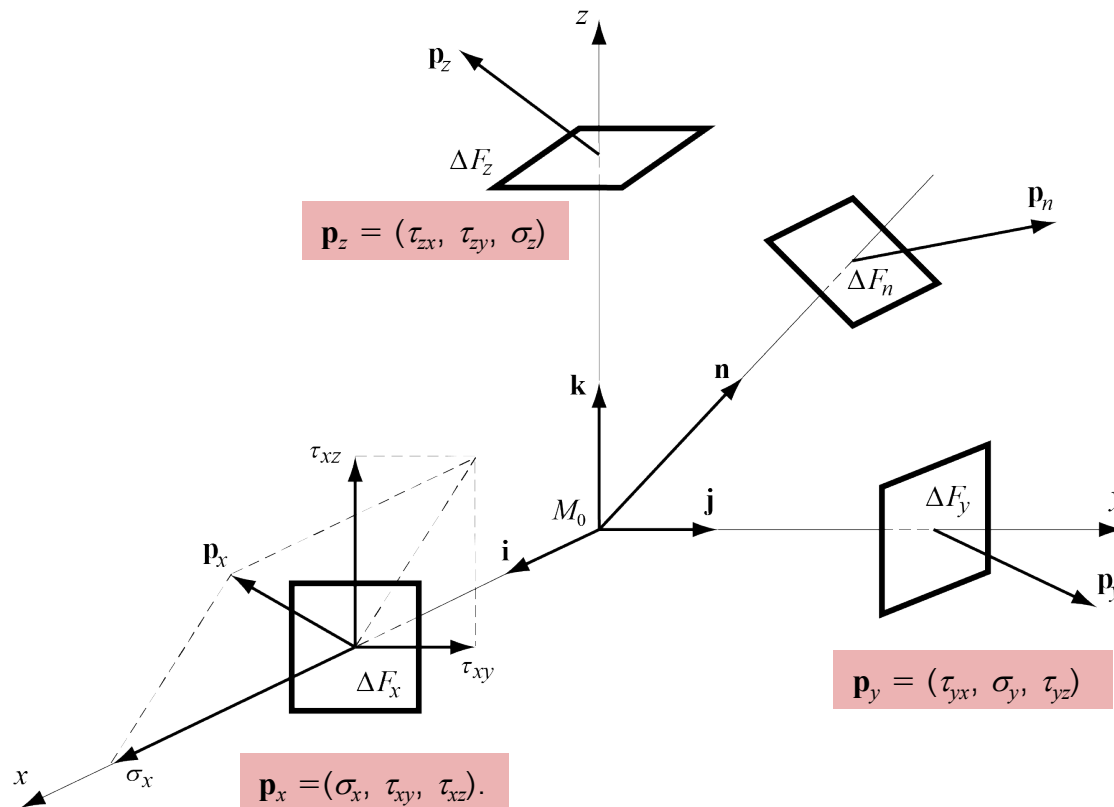
- $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{p}'_n \cdot \mathbf{n}$



Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrice de contrainte

Par le point M_0 , faisons passer trois axes perpendiculaires M_0x , M_0y et M_0z , de vecteurs unitaires respectifs i , j et k . Sur les trois éléments de surface ΔF_x , ΔF_y et ΔF_z , perpendiculaires aux axes, agissent respectivement les contraintes \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y et \mathbf{p}_z . Ces éléments de surface passent par le point M_0 , mais ils sont représentés séparément sur la figure pour plus de clarté



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrice de contrainte

La contrainte \mathbf{p}_x a pour composantes $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$. De même, les composantes de \mathbf{p}_y et \mathbf{p}_z sont respectivement $(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})$ et $(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$. Il est évident qu'en raison du théorème de Cauchy, ces neuf composantes ne peuvent pas être toutes indépendantes

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{j} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \bullet \quad \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{k} & \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \bullet \quad \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{i} & \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned}$$

Sous forme matriciel

$$\bullet \quad \mathbf{p}_n = \Gamma_\sigma \cdot \mathbf{n}$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrice de contrainte

La grandeur Γ_σ est appelée matrice du tenseur des contraintes ou plus simplement matrice des contraintes

- $$\Gamma_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Notons que la matrice Γ_σ est symétrique en vertu du théorème de Cauchy. Or, il est toujours possible de transformer une matrice symétrique en matrice diagonale par rotation appropriée des axes. La matrice Γ_σ peut donc être diagonalisée sous la forme

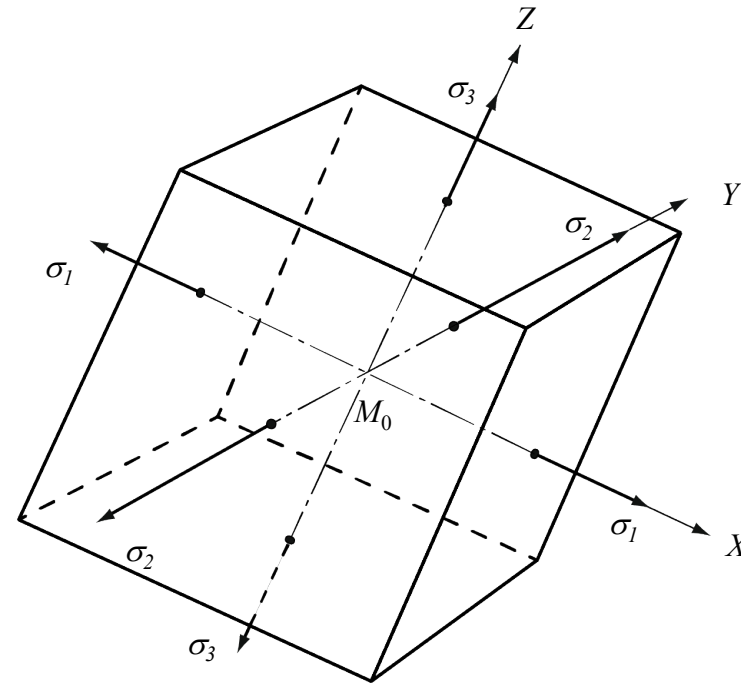
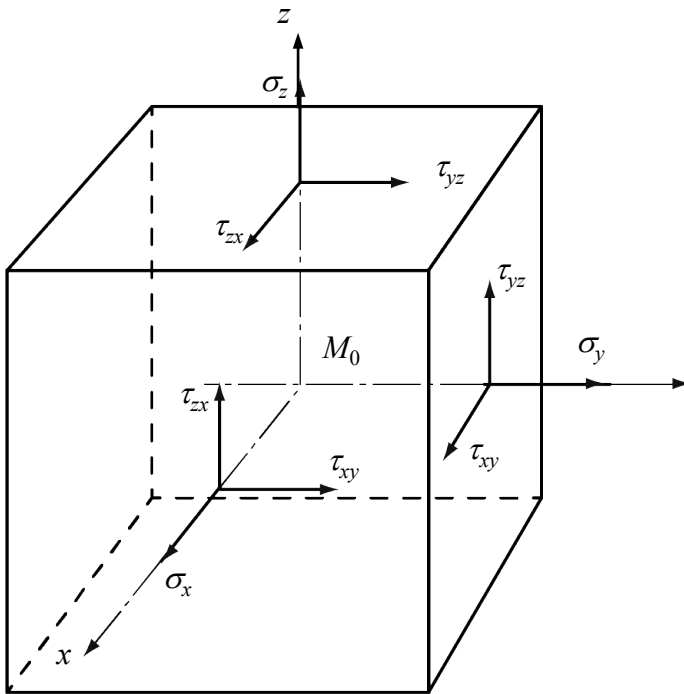
- $$\Gamma'_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrice de contrainte

Les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 sont portées par les axes principaux et sont normales aux faces principales conformément à l'algèbre linéaire, elles correspondent aux valeurs propres de la matrice des contraintes et sont donc des extrema des contraintes normales σ_x , σ_y et σ_z . Relevons enfin que les contraintes tangentielles sont nulles sur les faces principales, comme le montre la matrice Γ'_σ



Mécanique des structures

$$\Gamma_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



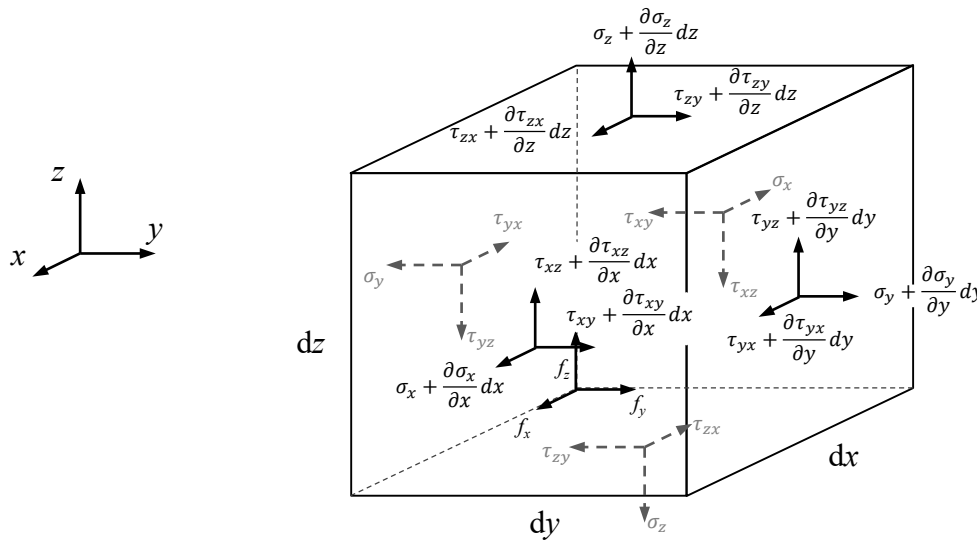
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Équation d'équilibre

Considérons maintenant un élément infinitésimal hexaédrique droit de volume $dV = dxdydz$ dont l'état de contrainte n'est plus considéré comme homogène, centré au point $M_0(x,y,z)$ et dont les faces sont orientées selon les axes x , y et z et soumis à des forces volumiques d'amplitudes f_x , f_y , et f_z .

Le champs de contrainte est alors non-uniforme



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Équation d'équilibre

Si les contraintes sont des fonctions continûment différentiables des variables x , y et z , cet accroissement peut-être déterminé à partir d'un développement de Taylor limité au premier ordre

- $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(x, y, z)dx$
- $\tau_{xy}(x + dx, y, z) = \tau_{xy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}(x, y, z)dx$
- $\tau_{xz}(x + dx, y, z) = \tau_{xz}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}(x, y, z)dx$

On peut écrire les **conditions d'équilibre des forces appliquées** sur le parallélépipède infinitésimal dV . La somme des six composantes issues des forces surfaciques dérivées des contraintes et de la composante découlant de la charge volumique correspondante doit s'annuler. Selon M_0x par exemple :

- $$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Equation d'équilibre

En divisant par le volume infinitésimal $dx dy dz$ et en procédant de manière identique selon $M_0 y$ et $M_0 z$ on aboutit finalement aux trois relations générales qui constituent les équations d'équilibre.

- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

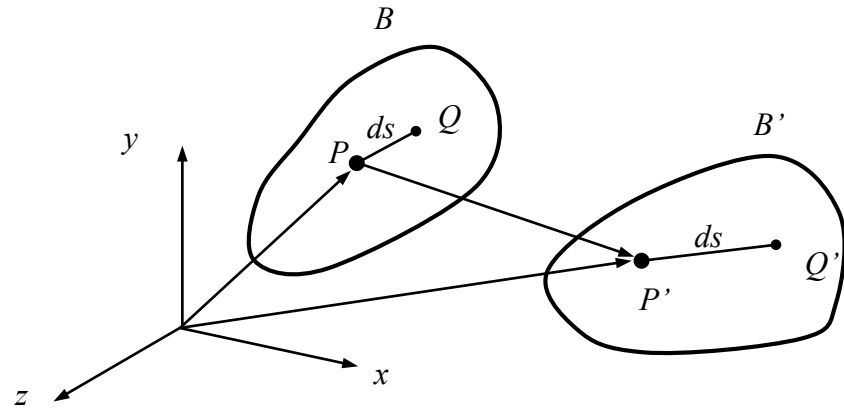
Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

Soit un point $P(x,y,z)$ d'un corps B occupant un volume dans l'espace. Lorsqu'il est déformé, le corps occupe une nouvelle configuration B' appelée **configuration déformée**.

- $x' = x + u(x, y, z)$
- $y' = y + v(x, y, z)$
- $z' = z + w(x, y, z)$

u, v, w sont les composantes du vecteur de déplacement $\overrightarrow{PP'}$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

Soit $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ un point infiniment proche de P . Après déformation Q devient Q'

- $x' + dx' = x + dx + u + du$
- $y' + dy' = y + dy + v + dv$
- $z' + dz' = z + dz + w + dw$

Le déplacement du point Q peut être exprimé par un développement de Taylor dans le voisinage de P

- $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$
- $v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$
- $w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

En substituant ces équations dans les relations qui expriment les coordonnées du point Q' et dans P' (on ne présente que la solution de la première équation)

- $dx' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

Ces équations étant linéaires en dx , dy et dz , elles peuvent être considérées comme représentant la transformation linéaire de \overrightarrow{PQ} en $\overrightarrow{P'Q'}$. L'incrément de déplacement vaut alors

- $du = dx' - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

La longueur au carré de ces éléments peut alors être exprimée par

- $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- $ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$
 $= dS^2 + 2e_x dx^2 + 2e_y dy^2 + 2e_z dz^2 + 4(e_{xy} dx dy + e_{yz} dy dz + e_{zx} dz dx)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

Ce qui permet de définir les éléments du **tenseur de déformation d'Euler-Almansi** e

- $e_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$
- $e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$

En se limitant aux **petites déformations**, les déplacements ont des dérivées petites et donc les produits peuvent être négligés. De sorte que le tenseur e peut être approché par le **tenseur de déformation infinitésimal** ε

- $e_x \cong \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$
- $e_{xy} \cong \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

La longueur d'un élément infinitésimal est alors donnée par

- $ds^2 = dS^2 + 2\varepsilon_x dx^2 + 2\varepsilon_y dy^2 + 2\varepsilon_z dz^2 + 4(\varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{yz} dy dz + \varepsilon_{zx} dz dx)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

En plus des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ définies, l'éléments dS subit une rotation qui peut être exprimée par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$

- $$\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \omega_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ce qui permet d'explicité les coordonnées du point P' et du vecteur déplacement de $\overrightarrow{PP'}$ (seul les premiers termes sont explicités ici)

- $$dx' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = (1 + \varepsilon_x) dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_{yx}) dy + (\varepsilon_{xz} - \omega_{zx}) dz$$
- $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} - \omega_{yx}) dy + (\varepsilon_{xz} - \omega_{zx}) dz$$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Matrices des déformations

Ce qui permet d'écrire la relation matriciel

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{\Gamma}_\varepsilon \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \mathbf{\Omega} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a ainsi défini la **matrice de déformations** $\mathbf{\Gamma}_\varepsilon$ (déformation infinitésimales au point P) et la **matrice de rotations** $\mathbf{\Omega}$ (rotations infinitésimales d'un segment PQ)

Mécanique des structures

$$\Gamma_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

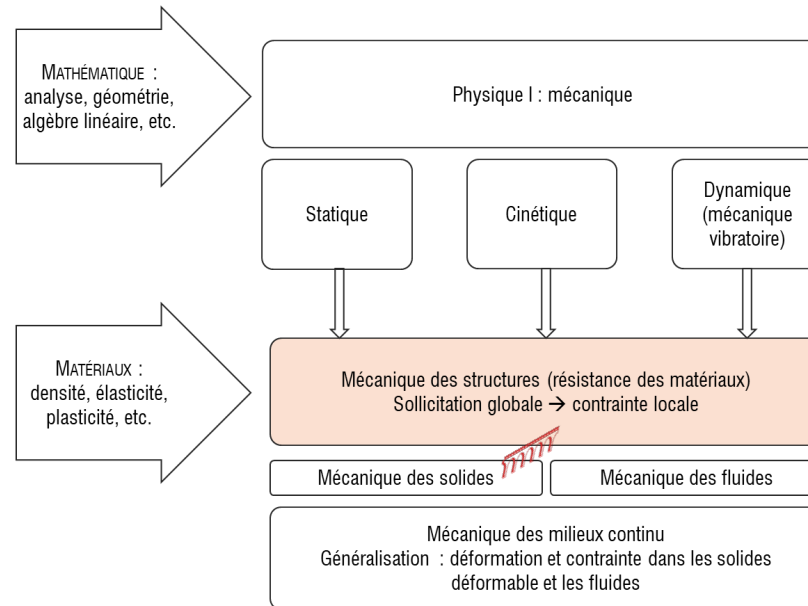
Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Introduction aux éléments d'élasticité linéaire

La théorie de l'élasticité est applicable dans un grand nombre de cas pratique, les déformations étant généralement suffisamment petites pour que le recours à la loi de Hooke soit justifié (en particulier pour les métaux et les céramiques).

Il faut aussi relever que la théorie de l'élasticité jette les fondements de la mécanique des solides et est à la base de l'élasticité non-linéaire, de la viscoélasticité et de l'élastoplasticité.

On se contentera ici de décrire les équations de base pour un matériau isotrope



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

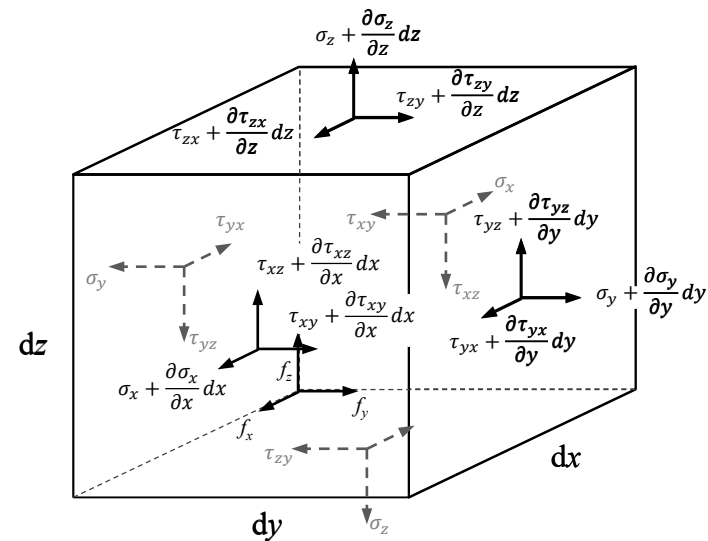
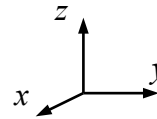
Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

La **théorie de l'élastostatique** pour un matériau isotrope, homogène et linéaire, soumis à des forces volumiques ainsi qu'à des déplacement ou des charges imposés sur sa frontière, se base sur l'utilisation des **15 équations** décrites ci-après.

3 équations d'équilibre

- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$
- $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$



Equilibre des forces dans les 3 directions (**chapitre 1 : équilibre intérieur d'un solide**)

- $\mathbf{R} = \sum \mathbf{P}_j$

Equilibre des moments de force à conduit à pouvoir écrire $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

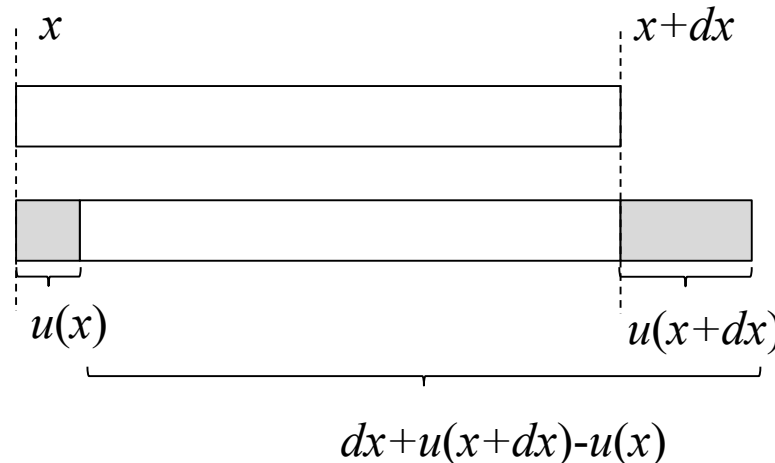
6 équations définissant la relation *déformation-déplacement*

(3 normales + 3 tangentielles)

- $$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Déformation relative (**chapitre 2 : traction ou compression simple**)

- $$\varepsilon = \frac{\text{allongement}}{\text{longueur initiale}} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{[dx + u(x+dx) - u(x)] - dx}{dx} \cong \frac{[u(x) + u'(x)dx - u(x)]}{dx} = u'(x) = \frac{du}{dx}$$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

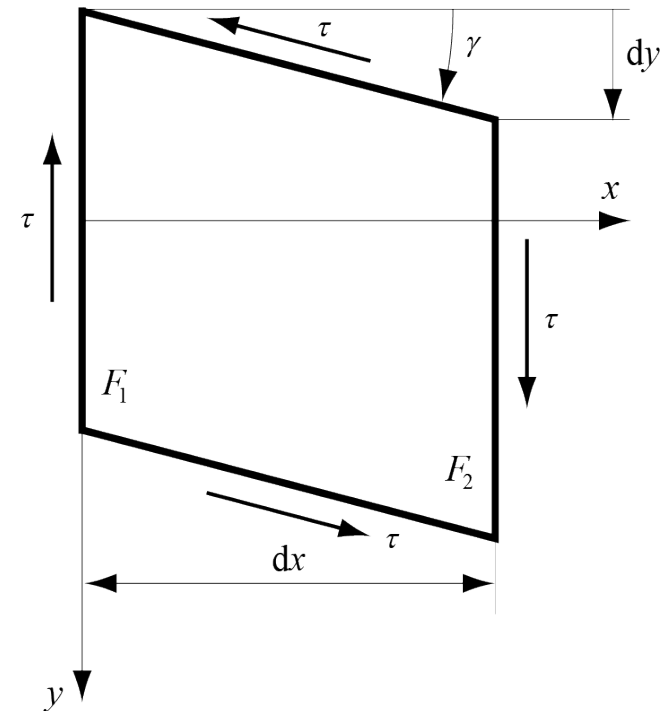
6 équations définissant la relation *déformation-déplacement*

(3 normales + **3 tangentielles**)

- $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$
 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$
 $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

Angle de glissement (**chapitre 4 : cisaillement simple**)

- $\gamma = \frac{dx}{dy}$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation* \rightarrow 3 comp. normales

- $\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z]$
- $\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [\mu\varepsilon_x + (1-\mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z]$
- $\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [\mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + (1-\mu)\varepsilon_z]$

Ou

- $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu\sigma_y - \mu\sigma_x]$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation* → 3 comp. normales

- $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z]$
- $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y]$

Chapitre 3 : Etat de contrainte bidimensionnel

	Allongement selon M_{0x}	Allongement selon M_{0y}	Allongement selon M_{0z}
Effet selon σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet selon σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Effet selon σ_z	$\varepsilon_{xz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{yz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y)$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéaire

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation* \rightarrow 3 comp. *tangentielles*

- $\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$
- $\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz}$
- $\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx}$

Ou

- $\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$
- $\gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$
- $\gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$

Angle de glissement (**chapitre 4, 5 et 6 : cisaillement, torsion, flexion**)

- $\gamma = \frac{\tau}{G}$
- $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Equation fondamentales de l'élastostatique linéair

6 équations caractérisant la relation *contrainte-déformation*

$$\bullet \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

$$\bullet \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

(sym)

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 14 : Éléments d'élasticité linéaires

Conditions aux limites

Le système d'équation précité ne peut être résolu que si les conditions aux limites appropriées sont imposées.

Considérons que le solide, occupant un domaine V , possède une frontière S que l'on peut diviser en deux parties ($S = S_u \cup S_t$).

La partie S_u représentant la partie de surface sur laquelle des composantes de déplacement u , v et w sont imposées aux valeurs respectives \bar{u} , \bar{v} et \bar{w}

- $u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad w = \bar{w} \quad \leftarrow$ conditions aux limites naturelles

La partie S_t représentant la partie de surface sur laquelle des composantes de traction t_x , t_y et t_z sont assignées aux valeurs respectives \bar{t}_x , \bar{t}_y et \bar{t}_z

- $t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x$
- $t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = \bar{t}_y \quad \leftarrow$ conditions aux limites essentielles
- $t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = \bar{t}_z$

Où n_x , n_y et n_z sont les normales unitaires extérieures à la surface

Mécanique des structures

$$\Gamma_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13: Analyse des états de contrainte

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Cercles de Mohr

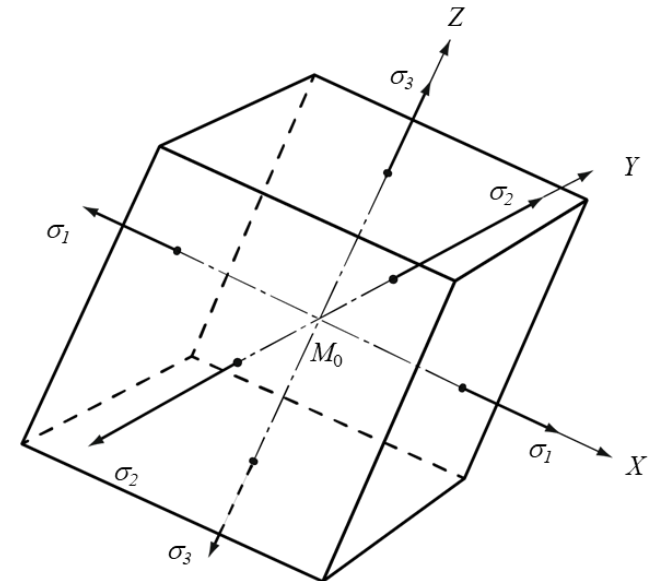
Dans le système M_0XYZ des axes principaux, choisis de manière que les contraintes principales soient classées comme suit : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Le module p_n de la contrainte \mathbf{p}_n peut être calculé à partir de

- $|\mathbf{p}_n|^2 = p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 = (\alpha\sigma_1)^2 + (\beta\sigma_2)^2 + (\gamma\sigma_3)^2$

Écrivons les équations permettant d'établir les conditions devant être remplies par les composantes σ_n et τ_n pour correspondre à des valeurs réelles de α , β et γ

- $\sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$
- $\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 = \sigma_n$
- $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Cas particulier de l'état de contrainte

En travaillant sur ce système d'équation on peut finalement exprimer

- $(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$

Dans le plan (σ, τ) , les trois égalités apparaissant dans les relations constituent des équations de cercles, connus sous le nom de ***cercles de Mohr***, de diamètres $(\sigma_1 - \sigma_2)$, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ et $(\sigma_2 - \sigma_3)$ et de centres $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ et $(\sigma_2 + \sigma_3)/2$ situés sur l'axe des contraintes normales σ .

Les trois inégalités sont dès lors satisfaites pour tout point se trouvant dans la zone hachurée comprise entre ces cercles

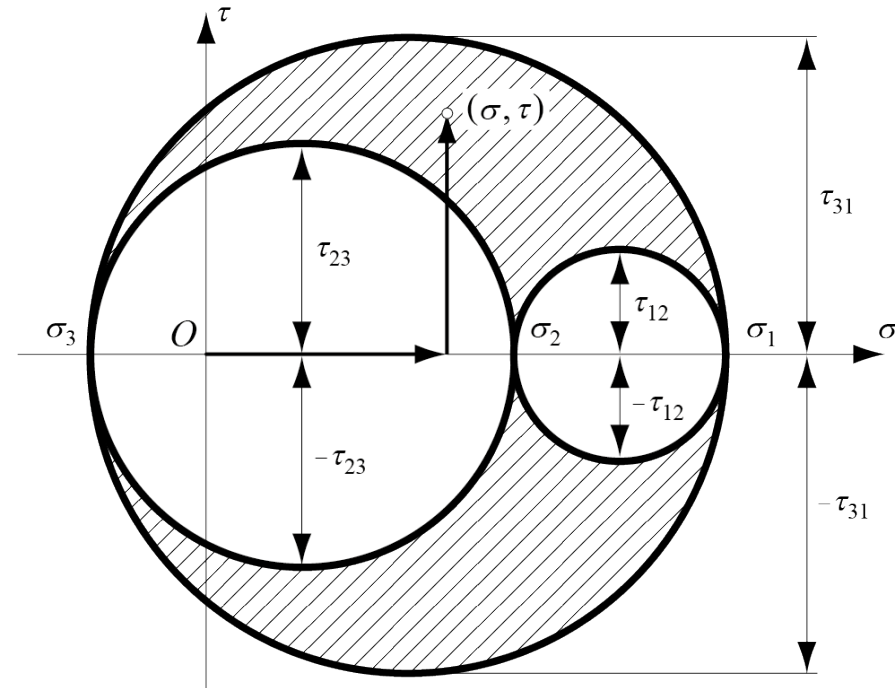
$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Cas particulier de l'état de contrainte

En travaillant sur ce système d'équation on peut finalement exprimer

- $(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \geq 0$
- $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$



$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Chapitre 13 : États de contrainte et déformation

Cas particuliers de l'état de contrainte

Trois contraintes principales égales : cet état de contrainte est réalisable pratiquement d'une façon presque parfaite en immergeant un solide isotrope, sans cavités intérieures, dans un fluide à pression constante : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_0$

Deux contraintes principales égales : si les forces extérieures et le solide possèdent un axe de symétrie passant par le point M_0 , deux des contraintes principales sont égales. Dans ce cas, un des cercles de Mohr dégénère en un point et les deux autres sont confondus. La symétrie axiale permet donc de ramener l'étude des contraintes à un problème plan

Une contrainte principale nulle : si l'une des contraintes principales est nulle, deux des cercles de Mohr sont tangents à l'axe des τ et l'état de contrainte est plan ou bidimensionnel. Un tel état de contrainte a été analysé en détails au chapitre 3.

Deux contraintes principales nulles : si deux des contraintes principales sont nulles, un des cercles de Mohr dégénère en un point situé à l'origine, tandis que les deux autres cercles coïncident et passent par l'origine. L'état de contrainte est alors mono-axial ou unidimensionnel. Ce cas très particulier est en fait celui de la traction ou de la compression pure étudiée au chapitre 2.